Esercizio 1

Dati i seguenti task:

	C	***T***	***D***
task1	0,2	1	1
task2	0,5	5	2
task3	1	8	4
task4	2	10	5
task5	1	20	10

che utilizzano le seguenti risorse:

	R1	***R2***	***R3***
task1	0,1	-	-
task2	-	0,1	-
task3	0,5	-	0,2
task4	0,5	0,3	0,2
task5	-	0,3	0,2

I task vengono schedulati in un sistema a priorita' fisse, con assegnamento delle priorita' pari a *deadline monotonic*.

a) Calcolare il tempo di bloccaggio di ciascun task nel caso in cui venga utilizzato il protocollo *priority ceiling*.

b) Calcolare il tempo di risposta nel caso peggiore di ciascun task.

Esercizio 2

Dato il seguente impianto:

$$\dot{x} = ax + bu + w$$

$$y = x$$

con

$$a = 3 \quad b = 1$$

w = rumore gaussiano bianco con media nulla densita' spettrale di potenza R_w .

Supponiamo che il valor medio dello stato iniziale del sistema sia $m(0) = E(x(0)) = 0$.

1) Progettare un controllore proporzionale in feedback scegliendo l'opportuno tempo di campionamento in modo tale che:

   1a) a un ingresso r_0 costante, il valor medio di y raggiunga il 90% del valore di regime in $\bar{t} = 0.1$ secondi

   1b) la varianza a regime di y sia minore di $0.1 * R_w$ (PS: effettuare ragionevoli approssimazioni sul calcolo).

2) Supponiamo che il controllore sia implementato da un task real-time task1 con tempo di calcolo $C_1 = 20$ msec. Supponiamo che il task sia schedulato insieme ad altri 3 task real-time con le seguenti caratteristiche:

	C (msec)	***T (msec)***
task2	4	10
task3	3	15
task4	4	16

L'algoritmo di scheduling e' EDF.
Utilizzando il test di schedulabilita' basato sul bound di utilizzazione, verificare che con il periodo calcolato al passo 1) il sistema non e' schedulabile.

2a) di quanto si puo' aumentare il periodo di task4 in modo che il sistema sia schedulabile?
2b) In caso sia possibile modificare solo il periodo del task1, qual'e' la minima varianza che si puo' ottenere.

Soluzione esercizio 1

Ricordiamo che la formula per calcolare il tempo di bloccaggio per il task τ_i e' la seguente:

$$B_i = max\{\xi_{kj} \,|\, ceiling(R_j) \geq \pi_i\}$$

cioe', bisogna prendere il massimo tra tutte le sezioni critiche di durata ξ_{kj} il cui ceiling e' maggiore del livello di preemption del task.

Per quanto riguarda il tempo di risposta, si applica la seguente formula ricorsiva:

$$R_i^{(0)} = C_i + B_i$$
$$R_i^{(k)} = C_i + B_i + \sum_{j=0}^{i-1} \left| \frac{R_i}{T_j} \right| C_j$$

La ricorsione si ferma quando si raggiunge un punto fisso $R_i^{(k+1)} = R_i^{(k)}$ oppure quando si supera la deadline.

Riportiamo la tabella riassuntiva della soluzione:

	B	**R**
task1	0,5	0,7
task2	0,5	1,4
task3	0,5	2,6
task4	0,3	4,8
task5	0	6,4

Soluzione esercizio 2

1a)

$$u = \gamma\, x + r$$
$$\dot{x} = (a+\gamma)x + b\,r + w$$

Valor medio dello stato del sistema in tempo continuo:

$$\dot{m} = (a+\gamma)m + br$$
$$m(t) = e^{(a+\gamma)t} m(0) + b \frac{e^{(a+\gamma)t} - 1}{a+\gamma} r_0 = b \frac{e^{(a+\gamma)t} - 1}{a+\gamma} r_0$$

supponendo che $a+\gamma < 0$ calocoliamo il valore di regime:

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = \frac{-b}{a+\gamma} r_0$$

il valore medio dopo $\bar{t} = 0.8$ deve essere il 90% del valore di regime:

$$b\frac{e^{(a+\gamma)\bar{t}}-1}{a+\gamma}r_0=\frac{-b}{a+\gamma}r_0$$

Sia $\alpha=a+\gamma$ il polo a ciclo chiuso del mio sistema tempo continuo. Svolgendo i calcoli

$$e^{\alpha\bar{t}}-1=0.9$$

$$\alpha=\ln\frac{(0.1)}{\bar{t}}=-23.03$$

1b)

Il sistema campionato e':

$$\tilde{x}(k+1)=e^{\alpha T}\tilde{x}(k)+r_0 b\frac{e^{aT}-1}{a}+\epsilon(k)$$

dove $\epsilon(k)$ e' l'errore dovuto al rumore .

$$\epsilon(k)=\int_{kT}^{(k+1)T} e^{a((k+1)T-\tau)}w(\tau)d\tau$$

Valor medio:

$$m(k+1)=e^{\alpha T}m(k)+r_0 b\frac{e^{aT}-1}{a}$$

La varianza del sistema campionato e':

$$P(k)=cov(\tilde{x}(k),\tilde{x}(k))$$

Sia $\bar{x}(k)=\tilde{x}(k)-m(k)$:

$$\bar{x}(k+1)\bar{x}(k+1)=e^{2\alpha T}\bar{x}(k)\bar{x}(k)+\epsilon^2(k)+2e^{\alpha T}\bar{x}(k)\epsilon(k)$$

Facciamo la media di entrambi i termini:

$$P(k+1)=e^{2\alpha T}P(k)+E[\epsilon^2(k)]+2e^{\alpha T}E[\bar{x}(k)\epsilon(k)]$$

Poiche' $\bar{x}$ e ϵ sono indipendenti:

$$P(k+1)=e^{2\alpha T}P(k)+E[\epsilon^2(k)]$$

Concentriamoci sul secondo termine. Come visto a lezione:

$$E\left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{a((k+1)T-\tau)}w(\tau)d\tau\int_{kT}^{(k+1)T} e^{a((k+1)T-\tau)}w(\tau)d\tau\right]=\int_0^T e^{2a\tau}R_w d\tau=...$$

$$...=R_w\frac{e^{2aT}-1}{2a}$$

Sostituendo:

$$P(k+1)=e^{2\alpha T}P(k)+R_w\frac{e^{2aT}-1}{2a}$$

a regime, $P(k+1)=P(k)$:

$$P(k)=\frac{R_w}{2a}\frac{(e^{2aT}-1)}{1-e^{2\alpha T}} \quad .$$

Il requisito e' che:

$$P(k)\leqslant 0.1R_w$$

Trascurando il denominatore di $P(k)$ (perche' α e' molto grande) :

$$e^{2aT}-1=2*0.1*a$$

$$T=\frac{\ln(1+0.2\,a)}{2\,a}=0.078$$

2a)

Sostituendo:

$$U_1=\frac{C_1}{T_1}=\frac{20}{78}\approx 0.2564$$

$$U=\sum_{i=1}^{4}\frac{C_i}{T_i}\approx 1.10>1$$

$$\frac{C_4}{T_4}\leqslant 0.8564 \qquad T_4\geqslant\frac{C_4}{0.8564}=4.67$$

2b)

Il periodo minimo e':

$$T_1=\frac{C_1}{0.15}=0.133$$

Sostituendo nella formula del $P(k)$:

$$P(k)=0.2\,R_w$$