

Compito del 24 Settembre 2004

Insegnamento di Sistemi in Tempo Reale
Laurea specialistica in Ingegneria dell'Automazione

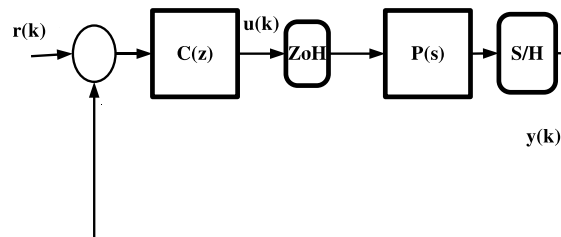


Figura 1: Schema a blocchi di riferimento

1 Esercizio 1

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 1, dove $P(s) = \frac{1}{s-1}$, $C(z) = \frac{z+a}{z+b}$, con il S/H funzionante con periodo T .

1. Individuare la regione nello spazio $[a, b]$ che garantisce stabilità;
2. Si scelgano i parametri a e b in modo tale che il sistema campionato vada a regime per una risposta a gradino in al più due passi. Si supponga, inoltre, che all'uscita del blocco $C(z)$ si abbia un convertitore D-A con una risoluzione di tre cifre decimali dopo la virgola. Dare una stima conservativa del range di valori che può assumere la variabile y a regime in risposta ad un gradino (si supponga che la quantizzazione comporti arrotondamento all'intero più vicino).
3. Mostrare un frammento di codice C che realizzi la funzione di controllo di cui al punto precedente.
4. Si scelgano ora i parametri a e b in modo che il sistema a ciclo chiuso abbia i poli in 0 e p con $|p| < 1$. Si supponga di rappresentare in virgola fissa i parametri a e b . Si dia una stima del numero minimo di cifre dopo la virgola necessarie per far sí che i poli a ciclo chiuso restino in un intorno al più di ampiezza 0.01 rispetto ai valori nominali.

2 Soluzioni Esercizio 1

1. Come prima cosa osserviamo che l'equivalente ZoH $P(z)$ é dato da

$$y(z) = \frac{\alpha}{z - \beta} u(z), \alpha = e^T - 1, \beta = e^T.$$

La funzione a ciclo chiuso é data da

$$y(z) = \frac{P(z)C(z)}{1 + P(z)C(z)} r(z) = \frac{\alpha(z + a)}{z^2 + (b - 1)z + \alpha a - \beta b} r(z). \quad (1)$$

L'applicazione del criterio di Jury conduce alle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \alpha a - \beta b < 1 \\ \alpha a - (\beta + 1)b > -2 \\ \alpha a - (1 - \beta)b > 0 \leftrightarrow a > b. \end{cases}$$

2. Considerando l'equazione 1 si comprende che scegliendo $b = 1$, $a = \beta/\alpha$ la f.d.t. a ciclo chiuso diviene $\frac{1}{z} + \frac{(\beta/\alpha)}{z^2}$ che ha le caratteristiche richieste. Per quanto riguarda la presenza della quantizzazione, essa può essere considerata in maniera quantitativa come un rumore additivo δq all'uscita del blocco $C(z)$ la cui ampiezza è compresa nell'intervallo $[-q/2, q/2]$ con $q = 10^{-3}$. L'uscita è dunque data da:

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{P(z)C(z)}{1 + P(z)C(z)} r(z) + \frac{P(z)}{1 + P(z)C(z)} \delta q(z) \\ &= \frac{\alpha(z + a)}{z^2 + (b - 1)z + \alpha a - \beta b} r(z) + \frac{\alpha(z + b)}{z^2 + (b - 1)z + \alpha a - \beta b} \delta q(z) \\ &= \frac{\alpha(z + \beta/\alpha)}{z^2} r(z) + \frac{\alpha(z + 1)}{z^2} \delta q(z) \\ &= \alpha \left(\left(\frac{1}{z} + \frac{\beta/\alpha}{z^2} \right) r(z) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \delta q(z) \right), \end{aligned}$$

da cui è possibile scrivere:

$$y(k) = \alpha(r(k - 1) + (\beta/\alpha)r(k - 2) + \delta q(k - 1) + \delta q(k - 2)).$$

Considerando il range di variazione di δq possiamo scrivere:

$$\alpha(1 + \beta/\alpha - q) \leq y_\infty \leq \alpha(1 + \beta/\alpha + q).$$

3.

4. Dall'equazione 1 il denominatore della funzione di trasferimento è dato da:

$$P(z, a, b) = z^2 + (b - 1)z + \alpha a - \beta b.$$

L'assegnamento di poli $\hat{z}_1 = 0$, $\hat{z}_2 = p$ si ottiene scegliendo come valori nominali: $\hat{b} = 1 - p$ e $\hat{a} = \frac{\beta(1-p)}{\alpha}$. A questo punto facciamo un'analisi di sensitività alle piccole variazioni:

$$\begin{aligned} P(\hat{z} + dz, \hat{a} + da, \hat{b} + db) &\approx P(\hat{z}, \hat{a}, \hat{b}) + \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=\hat{z}, a=\hat{a}, b=\hat{b}} dz + \frac{\partial P}{\partial a} \Big|_{z=\hat{z}, a=\hat{a}, b=\hat{b}} da + \frac{\partial P}{\partial b} \Big|_{z=\hat{z}, a=\hat{a}, b=\hat{b}} db \\ &= P(\hat{z}, \hat{a}, \hat{b}) + (2\hat{z} - p)dz + \alpha da + (\hat{z} - \beta)db. \end{aligned}$$

Valutando in $\hat{z}_1$ e $\hat{z}_2$ si trova:

$$\begin{aligned} dz_1 &= \frac{\alpha da - \beta db}{p} \\ dz_2 &= -\frac{\alpha da - \beta db}{p} = -dz_1. \end{aligned}$$

Scegliendo una rappresentazione con l cifre si ha che $-0.510^{-l} \leq da, db \leq 0.510^{-l}$. Quindi, nel caso peggiore, avremo:

$$|dz| < 0.510^{-l} \frac{\alpha + \beta}{p}.$$

Quindi:

$$10^{-l} \leq 0.01 \frac{p}{\alpha + \beta},$$

ed

$$l \geq -\log 0.01 \left(\frac{p}{\alpha + \beta} \right).$$