Compito del 12 gennaio 2005

Insegnamento di Sistemi in Tempo Reale
Laurea specialistica in Ingegneria dell'Automazione

1 Esercizio

Sia dato il seguente sistema:

$$G(s) = \frac{b}{(s+a)}.$$

Si supponga che $a = -3$ e $b = 3 + \delta$, dove δ è un parametro incerto che varia nell'insieme $[-\Delta, \Delta], \Delta \geq 0$. Si vuole progettare un controllore digitale per il sistema della forma $C(z) = \frac{A}{z-B}$ in modo tale che il sistema a ciclo chiuso si comporti come un sistema del secondo ordine in cui:

- Il rise time t_r sia inferiore a $0.3s$.
- l'overshoot sia trascurabile;
- il tempo di campionamento sia tale che $\omega_n T \approx 0.06$

1. si trovino dei parametri opportuni per il controllore e per il tempo di campionamento;
2. si calcoli la massima variazione $|\frac{\delta}{b}|$ che il sistema a ciclo chiuso è in grado di tollerare;
3. Si scriva il codice C della funzione

```
double update(double u);
```

   la quale prende come parametro u il valore di riferimento in ingresso, e restituisce il valore dell'uscita del controllore. Si calcoli inoltre il suo tempo di esecuzione, assumendo che le varie operazioni abbiano il costo computazionale riportato in tabella.

operazione	durata (msec)
chiamata funzione	0.5
moltiplic.	0.1
addiz.	0.05
assegnamento	0.05
ritorno da funzione	0.5

4. Assumere che il tempo di calcolo del task τ_1 sia pari al tempo di calcolo della funzione update(). Assumere inoltre che nel sistema siano presenti i task descritti nella seguente tabella:

Task	WCET	Periodo	sezione critica sulla risorsa R
τ_1	?	?	0
τ_2	2	6	0.5
τ_3	3	16	1
τ_4	4	20	1

   dove tutti i tempi sono espressi in millisecondi. Assumere inoltre che il sistema sia schedulato dall'algoritmo fixed priority. Assegnare le priorità ai task in modo che il tempo di risposta del task τ_1 sia minimo e costante. Verificare che secondo l'assegnamento di priorità scelto, il sistema risulti schedulabile, calcolando il tempo di risposta di ciascun task.

5. Infine, assumere che il ritardo nell'attuazione sia pari al tempo di risposta del task τ_1. Si scelgano nuovamente i parametri del controllore in modo che, tenendo conto del ritardo, il sistema a ciclo chiuso mantenga la specifica sull'overshoot. Si calcoli una stima del rise time del sistema risultante.

2 Soluzione esercizio

1. Si richiede che il comportamento a ciclo chiuso sia simile a quello di un sistema del secondo ordine. Come primo passo troviamo i poli ideali di tale sistema. Dalla richiesta che l'overshoot sia zero, ne risulta che lo smorzamento ξ deve essere uguale a 1. Da $t_r = 1.8\omega_n$ viene fuori che $\omega_n = 6rad/s$ e quindi $T = 0.025s$. Quindi il comportamento richiesto a ciclo chiuso é quello di un sistema del secohndo ordine che abbia due radici coincidenti in $s_0 = -6$.

   Calcolando la funzione di trasferimento dell'impianto discretizzato, si ha

   $$G(z) = \frac{b}{a}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

   A questo punto, troviamo i parametri del sistema in modo che i poli a ciclo chiuso vengano mappati in e^{-s_0T}. La funzione a ciclo chiuso ideale é quindi: $z^2 - 2e^{s_0T}z + e^{2s_0T}$. Quindi, deve essere

   $$z^2 - 2ze^{s_0T} + e^{ss_0T} = (z-B)(z-e^{-aT}) + \frac{b}{a}(1-e^{-aT})A$$

   da cui

   $$B = 2e^{s_0T} - e^{-aT} A = \frac{e^{2s_0T} - Be^{-aT}}{b/a(1-e^{-aT})} = \frac{a}{b}\frac{(e^{s_0T}-e^{-aT})^2}{1-e^{-aT}}.$$

   .

2. Il $\frac{\delta}{b}$ si trova per applicazione del criterio di Jury. In particolare il denominatore della funzione a ciclo chiuso perturbata é dato da:

   $$z^2 - 2e^{s_0T}z + e^{2s_0T} + \frac{\delta}{a}(1-e^{-aT})A = z^2 - 2e^{s_0T}z + e^{2s_0T} + \frac{\delta}{b}(e^{s_0T}-e^{-aT})^2.$$

   Applicando il criterio di Jury si trova:

   $$-\frac{(e^{s_0T}-1)^2}{(e^{s_0T}-e^{-aT})^2} \le \frac{\delta}{b} \le \frac{1-e^{2s_0T}}{(e^{s_0T}-e^{-aT})^2}.$$

3. Il codice C può essere schematizzsto come segue:

   $$y(k+1) = AU(k) - By(k)$$

   ```
   double y;
   double update(double u)
   {
       double y;
       y = - B * y + A * u;
       return y;
   }
   ```

   Il tempo per eseguire la funzione è 1.3 msec.

4. Tenendo conto dei tempi di bloccaggio, i tempi di risposta sono i seguenti:

   $$R_1 = 1.3 R_2 = 4.3 R_3 = 9.3 R_4 = 15.6$$

5. Esprimendo il ritardo come $(1-m)T$ la f.d.t. discretizzata dell'impianto é data da:

   $$G(z) = \frac{b}{a}(1-e^{-amT})\frac{z+\alpha}{z(z-e^{-aT})}$$

   dove $\alpha = \frac{e^{-amT}-e^{-aT}}{1-e^{-amT}}$. Una semplice soluzione al problema di design proposto puó essere di cancellare lo zero in $-\alpha$ con il polo del controllore: $B = -\alpha$. Il polinomio caratteristico a ciclo chiuso risultante sará dato da: $z^2 - ze^{-aT} + \frac{b}{a}A(1-e^{-amT})$. Mantenendo la specifica sull'overshoot si ottengono due soluzioni coincidenti in $e^{s_0T} = \frac{e^{-aT}}{2}$, che porta a $s_0 = -\omega_n = 3 - \frac{log(2)}{T} = -24.7$. Da ció segue il nuovo valore del rise time.